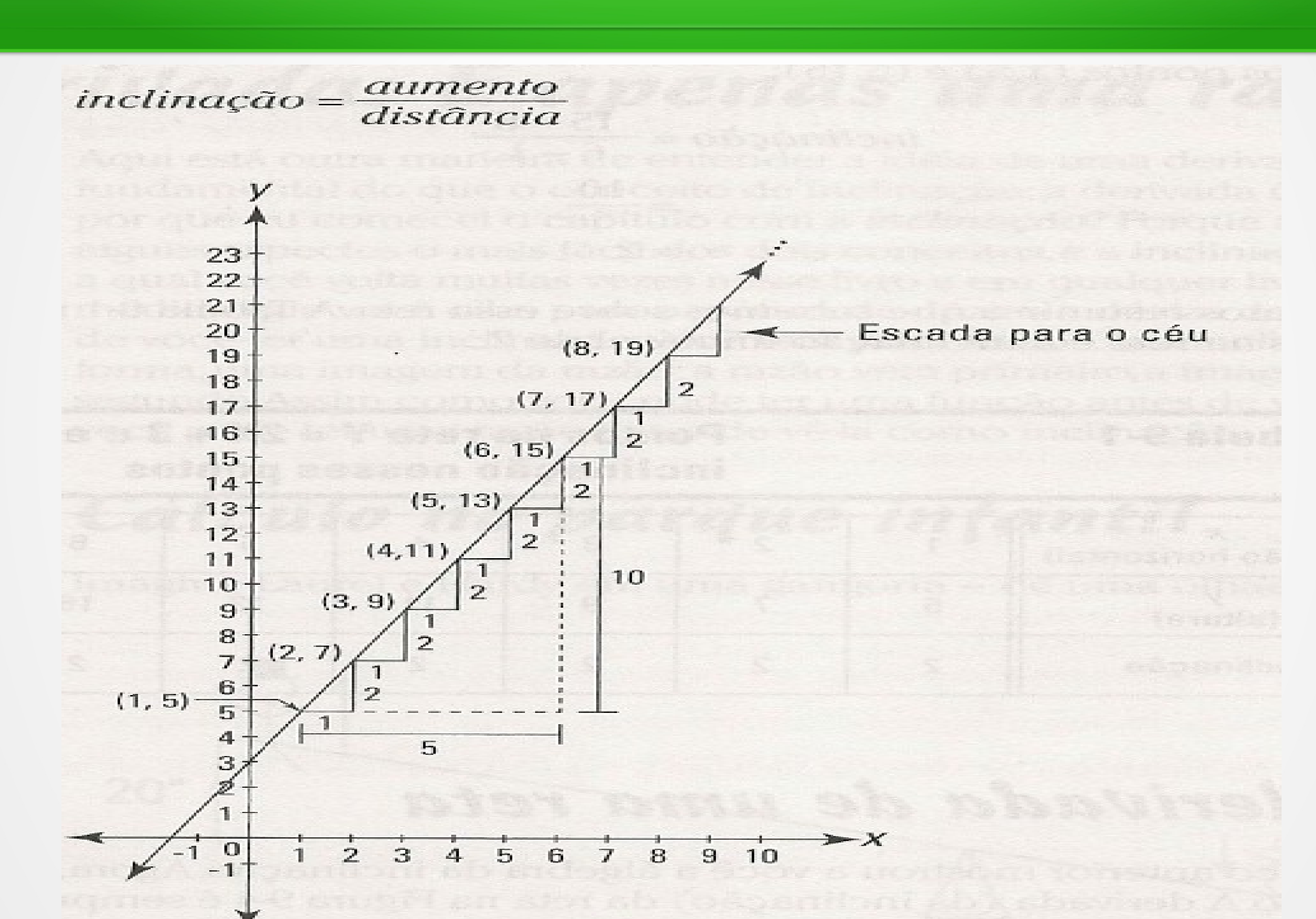
# Derivadas

- A Diferenciação  é a primeira das duas maiores ideias do cálculo
- Fazer a diferenciação é encontrar a inclinação da reta ou de uma curva



$inclinação = \frac{aumento}{distância}$
Escada para o céu
(1, 5)
(2, 7)
(3, 9)
(4,11)
(5, 13)
(6, 15)
(7, 17)
(8, 19)
1
2
5
10
y
x

# Definição

- Suponhamos que f seja uma função contínua no ponto de abscissa x = a . A **inclinação da reta tangente** ao gráfico de f no ponto (a,f(a)) será dada por

$$m(a) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

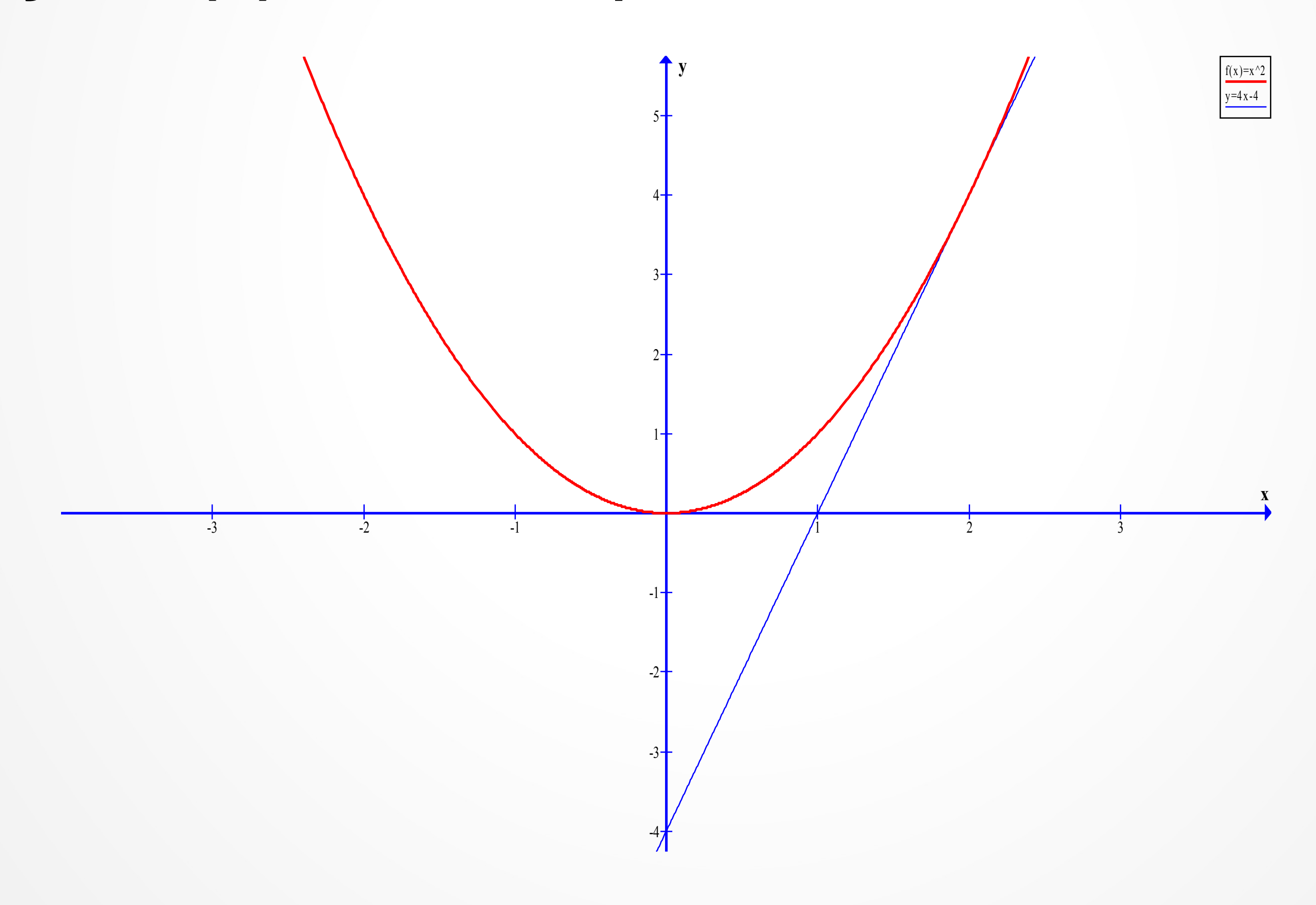
se o limite existir. Se não existir o limite e

$$\lim_{\Delta a \to 0^{\pm}} \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a} = \pm \infty$$

então a reta tangente a curva f, no ponto (a,f(a)) será a reta x = a.

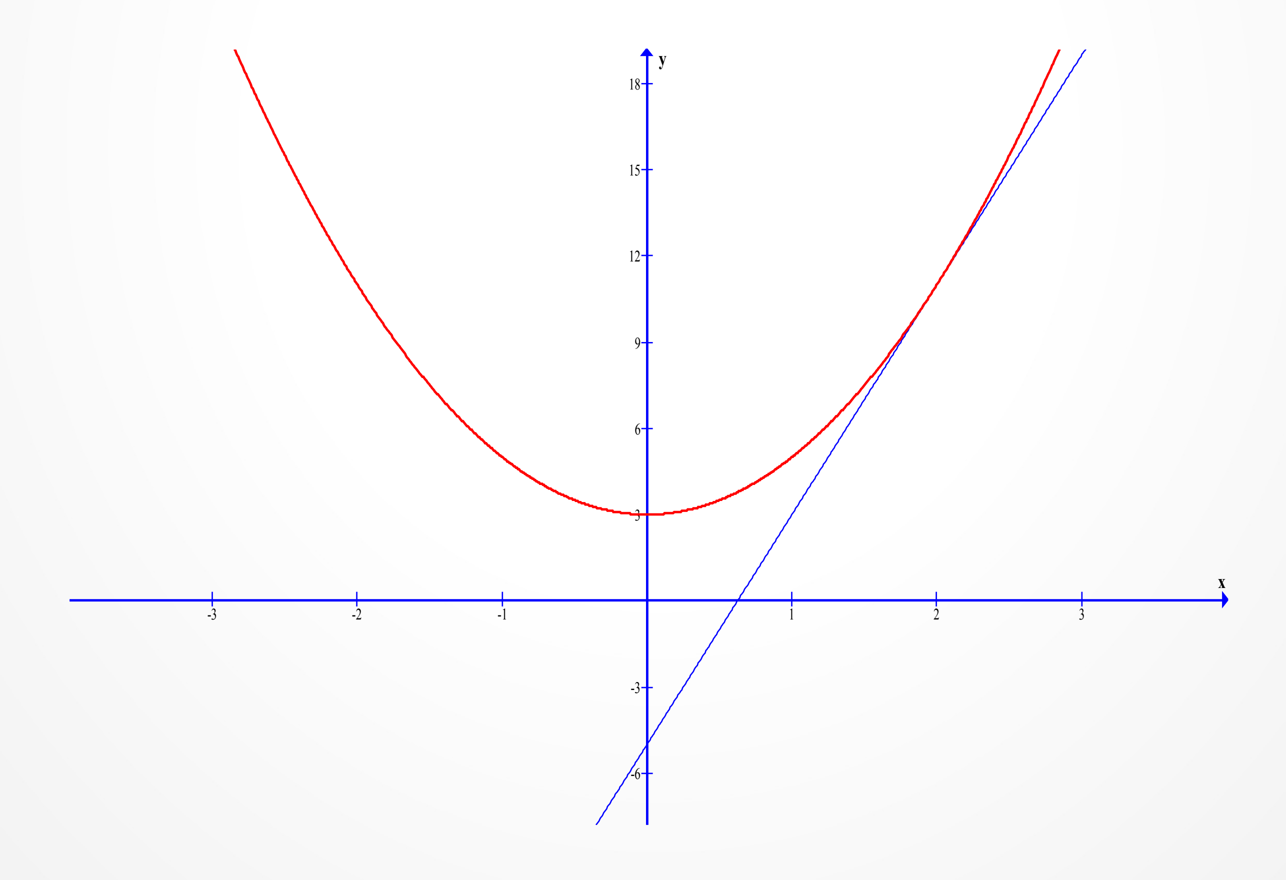
# Exemplo 1

- Determinar a inclinação da reta tangente à função $f(x) = x^2$, no ponto de abscissa $x = 2$.



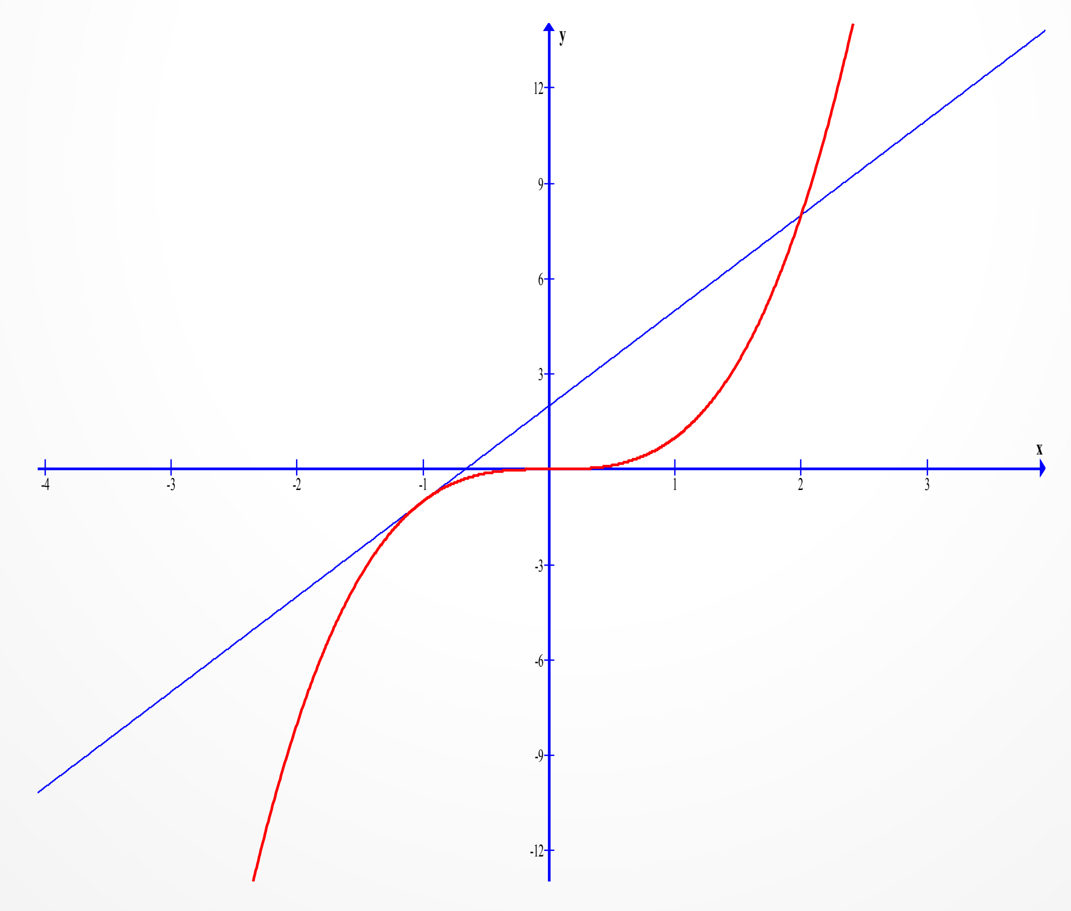
# Exemplo 2

- Determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abcissa é 2.



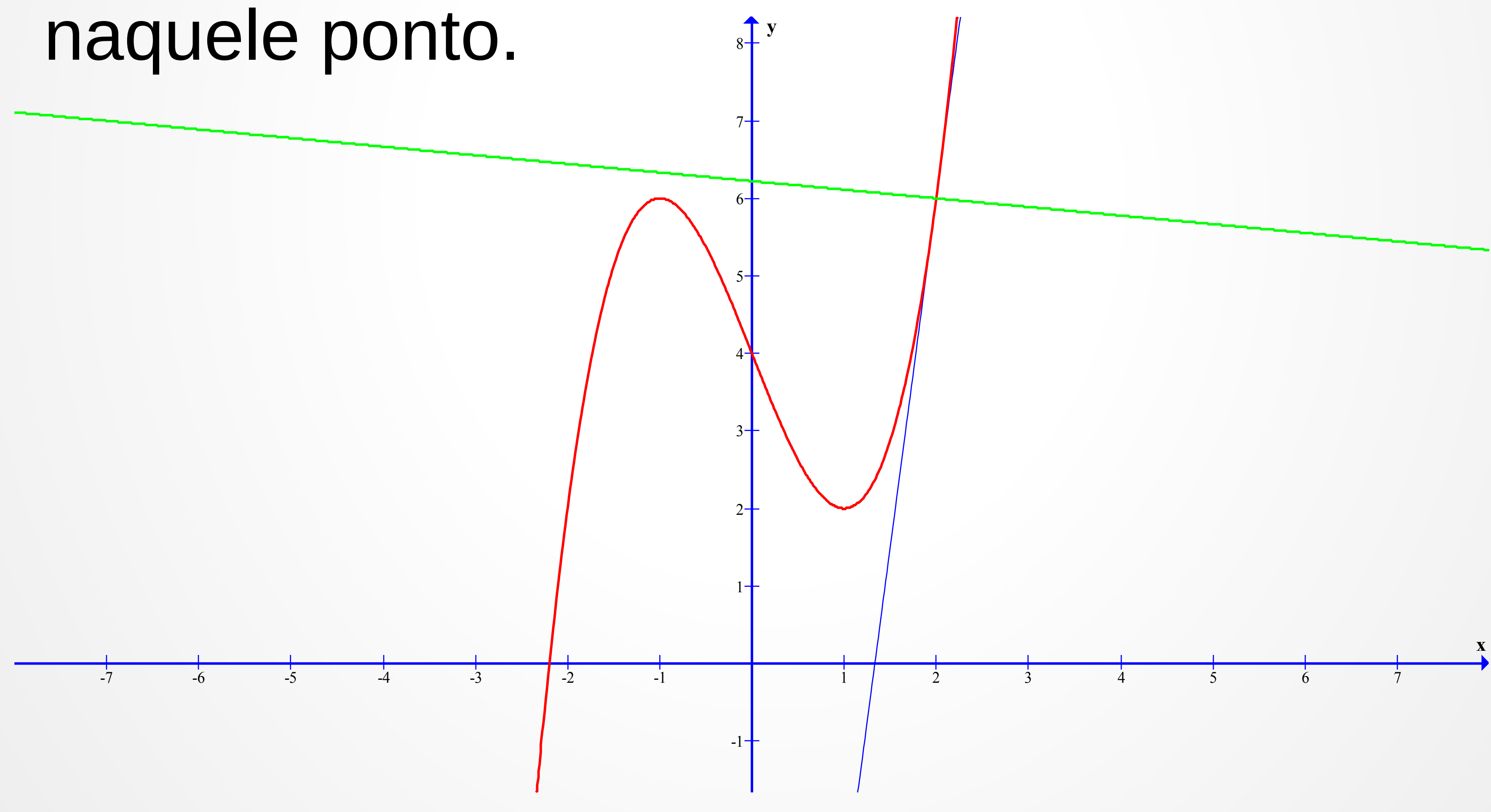
# Exemplo 3

- Determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3$ no ponto cuja abcissa $x = -1$.



# Definição

- A **reta normal** à uma curva em um dado ponto é a reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.



# Definição

- A **derivada de uma função f** é a função denotada por **f '**, tal que o seu valor em qualquer número x do domínio de f é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se o limite existir.

Obs: A derivada é a função que determina a inclinação da reta tangente a uma curva em seus pontos.

# Outra definição e mais notações

- Se fazemos $y = x + \Delta x$ na definição de derivada podemos reescrevê-la da forma

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Fazendo $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ podemos escrever ainda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

# Aplicabilidade

Seja y = f(x), onde f é definida em um intervalo aberto contendo a

(i) A taxa média de variação de y = f(x) em relação a x no intervalo [a,a+h] é

$$y_m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(ii) A taxa instantânea de variação de y em relação a x em a é

$$y_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Desde que o limite exista.

# Exemplo 4

- A voltagem em certo circuito elétrico é de 100 volts. Se a corrente (em àmperes) é I e a resistência (em ohms) é R, então, pela lei de Ohm, I=100/R. Se R está aumento, ache a taxa instantânea de variação de I em relação a R em:

  a) qualquer resistência R.

  b) uma resistência de 20 ohms.

# Resumindo

- Aplicações da derivada:

  (i) Tangente:O coeficiente angular da tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é $f'(a)$.

  (ii) Taxa de variação: Se $y = f(x)$, a taxa instantânea de variação de $y$ em relação a $x$ em $a$ é $f'(a)$.

# Definição

- Uma função f é diferenciável em um intervalo fechado [a,b] se f é diferenciável no intervalo aberto (a,b) e se os seguintes limites existem:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(a)}{h}$$

Os limites laterais da definição costumam ser designados por **derivada à direita** e **derivada à esquerda** de f.

# Observação

- Se f é definida em um intervalo aberto que contém a, então f '(a) existe se e somente se as derivadas à direita e à esquerda existem e são iguais.

# Exemplo 5

- Considere a função $f(x) = |x|$ e responda as seguintes questões:

  a) $f(x)$ possui limite em $x = 0$?

  b) $f(x)$ é contínua em $x = 0$?

  c) Qual é a derivada de $f(x)$?

  d) Quanto vale $f'(0)$?

# Teorema

- Se uma função f é derivável em um ponto de abscissa $x = a$, então f é contínua nesse ponto.

- Algumas conclusões:

  - O contrário do teirema anterior nem sempre é verdade

  - Uma função pode deixar de ser derivável em um ponto se:

  1)a função for descontínua no ponto (teorema anterior);

  2) a tangente for uma reta vertical (limite da razão incremental quando o incremento tende a zero é $\pm\infty$ ;

  3) não existe tangente bem definida no ponto (como é o caso da função modular em x = 0, que tem um “bico”).

# Ponto de reversão ou ponto cuspidal

- Um ponto P(a,f(a)) do gráfico de uma função f é chamado **ponto de reversão**, ou **ponto cuspidal**, se f é contínua em a e prevalece as duas condições seguintes:

(i) $f'(x) \to \infty$ quando x tende para a por um lado

(ii) $f'(x) \to -\infty$ quando x tende para a pelo outro lado.

# Regras de derivação

- 1)Derivada de uma função linear

  Se f(x) = mx + b, então f ' (x) = m
- 2) Derivada de uma constante:

  Se f(x) = b, então f ' (x) = 0
- 3) Derivada de uma potência

  Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$

# Exemplo 6

- Determine as derivadas das funções abaixo:

$$a)\,f(x) = 3x^7$$

$$b)\,f(x) = \frac{1}{2}x^{12}$$

$$c)\,f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$$

$$d)\,f(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$$

$$e)\,f(x) = \sqrt[4]{x^5}$$

# Regra de derivação

- 4)Derivada da função vezes a constante

$$D_x[cf(x)] = c.D_x f(x)$$

- 5) Derivada da soma

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

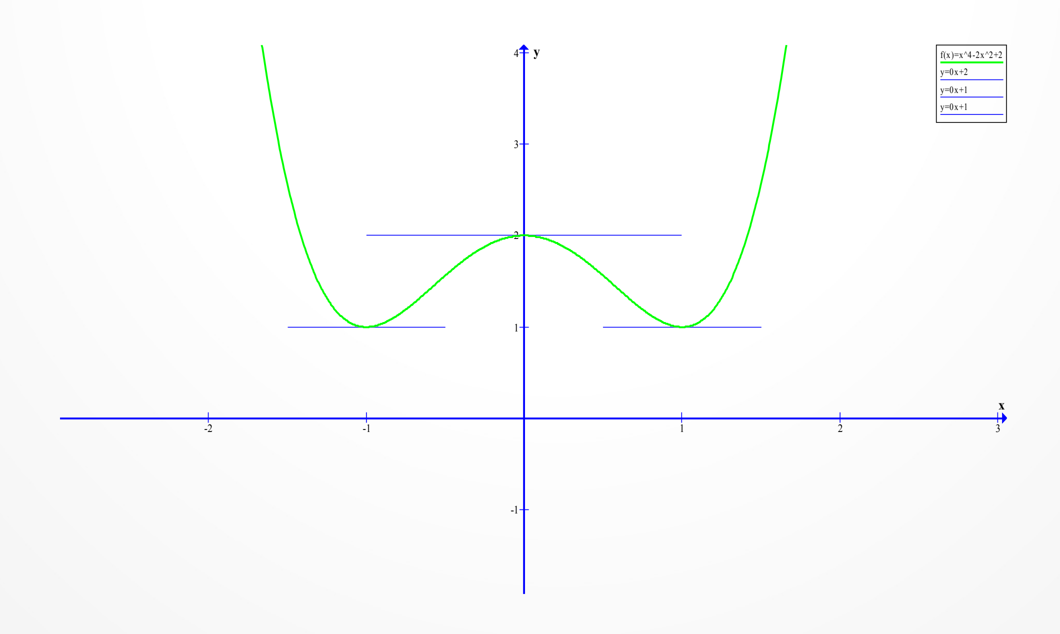
- 6) Derivada da diferença

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

# Exemplo 7

a) Se $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$, determine f '(x)

b) A curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tem tangentes horizontais ? Se sim, onde?



# Regra de derivação

- 7) Derivada do produto

$$D_x[f(x).g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$$

outra notação: $(f.g)' = fg' + gf'$

- 8) Derivada do quociente

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

outra notação: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

# Exemplo 8

a) Determine a derivada de $y= (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

b) Determine a derivada de $y = t^2 – 1 / t^3 + 1$

c) Determine a derivada de $y = 1/x$

d)Determine a derivada de $y = \frac{(x – 1)(x^2 – 2x)}{x^3}$

# Derivadas de derivadas ou Derivadas Superiores

- A função $f''$ é chamada de segunda derivada de f porque é a derivada da primeira derivada. Ela é denotada de várias maneiras:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D_x[f'(x)] = D_x^2 f(x)$$

- A derivada terceira $f'''(x) = D_x[f''(x)] = D_x^3 f(x)$

...

- A derivada de ordem n : $f^n(x) = D_x^n f(x)$

# Exemplo 9

- **Pressão no cilindro**:Se um gás for mantido em um cilindro a uma temperatura constante T, a pressão P estará relacionada com o volume V de acordo com uma fórmula da forma

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

em que a, b, n e R são constantes. Determine dP/dV.

# Exemplo 10

- **Reação do organismo a um medicamento:** A resposta do corpo a uma dose de um medicamento é as vezes representada por uma equação na forma

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

em que C é uma constante positiva e M é a quantidade de medicamento absorvida pelo sangue. Se a resposta é uma variação na pressão sanguínea, então R é medido em milímetros de mercúrio.

Se a resposta for uma variação de temperatura, R será medido em graus, e assim por diante. Determine dR/dM. Essa derivada, em função de M é chamada de sensibilidade do organismo ao medicamento.

# Derivada como Taxa de variação

- A **taxa de variação instantânea** de f em relação a x é a derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

- **Velocidade Instantânea** é a derivada da posição em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é s=f(t), então sua velocidade no tempo t é

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

- Aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é s = f(t), então sua aceleração no instante t é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

# Exemplo 11

- Uma carga de dinamite lança uma pedra pesada para cima com velocidade de lançamento de 160 pés/s. A pedra atinge uma altura de $s = 160t - 16t^2$ pés após t segundos.

  a) Qual a altura máxima atingida pela pedra?

  b) Quais são a velocidade e o módulo da velocidade da pedra quando ela está a 256 pés do solo na subida?

c) Qual a aceleração da pedra em qualquer instante t durante sua trajetória (depois da explosão)?

d) Quando a pedra atingirá o solo novamente?